

Tehetetlenségi tenzor

Vegyünk fel egy Descartes-koordinátarendszert! Ebben a merev test tömegközéppontjának helyvektorát jelöljük $\mathbf{r}_0$ -val. Rögzítsünk a tömegközépponthoz is egy koordináta-rendszert, amiben egy, a merev testhez tartozó tetszőleges pontnak a helykoordinátája $\mathbf{r}_i$. Egy merev test pontjának a sebessége a testre jellemző translációs sebességből és a forgásból származó kerületi sebesség határozza meg: $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$

A merev test kinetikus energiája:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_0^2 + \sum m_i \mathbf{v}_0 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \sum \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2$$
$$= T_{\text{haladó}} + T_{\text{kölcsönös}} + T_{\text{forgási}}$$

A második tag akkor lesz nulla, ha a testhez rögzített koordinátarendszer kezdőpontját a tömegközéppontba helyezzük, vagy ha rögzítjük a testet.

A harmadik tag felírásához először kifejtjük a vektoriális szorzatot, majd a kapott kifejezés négyzetét vesszük. Ennek eredményeképpen kapjuk az alábbi kifejezést:

$$T_{\text{forg}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\omega}$$

ahol $\boldsymbol{\theta}$ **tehetetlenségi tenzor** elemei:

$$\theta_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - (r_k)_i (r_k)_j) = \int \rho(\mathbf{r}) (\mathbf{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j) dV$$

Másik felírási módja:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & -\theta_{xy} & -\theta_{xz} \\ -\theta_{yx} & \theta_{yy} & -\theta_{yz} \\ -\theta_{zx} & -\theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix}$$

A tenzor egyes elemeit deviációs nyomatékoknak nevezzük, a főátló egyes elemei pedig a tehetetlenségi nyomaték komponensei.

Ha a testen kívüli pontból húzunk egy forgástengelyt a testen keresztül, és egy tetszőleges pontot kiválasztunk a merev testen belül, aminek a tengelytől mért távolsága l , a ponttól vett távolsága r_i és a tengely irányú egységvektor $\mathbf{n}$, akkor a test tehetetlenségi nyomatéka:

$$\theta = \sum m_i l_i^2 = \sum m_i |\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i| = \mathbf{n} \boldsymbol{\theta} \mathbf{n}$$

A Steiner-tétel segítségével megadhatjuk a test egy O pontján átmenő tetszőleges forgástengelyre vett tehetetlenségi nyomatékát.

$$\theta = \theta_{TKP} + m s^2$$

ahol s a TKP és az O pont távolsága.

A test impulzusmomentuma is megadható egyszerűen:

$$\mathbf{N} = \sum_k (\mathbf{r}_k \times m_k \dot{\mathbf{r}}_k) = \sum_k m_k \mathbf{r}_k \times (\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k) = M \cdot \mathbf{r}_{TKP} \times \mathbf{v}_0 + \sum_k m_k \mathbf{r}_k \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)$$

A képlet tovább fejthető. Főtehetetlenségi rendszerben: $N_i = \omega_i \theta_i$